Topologia algébrica 2024

Professor: Vinicius Ramos

Entrega dia 27/06

1) Prove que a grasmaniana real $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ é uma variedade, calcule sua dimensão e construa uma estrutura celular para ela.

2) Seja $\pi : E \to M$ uma fibrado vetorial real e seja $E \otimes \underline{\mathbb{C}}$ sua complexificação. Prove que $2c_k(E \otimes \underline{\mathbb{C}}) = 0$ para todo k ímpar.

3) Seja ∇ uma conexão em um fibrado vetorial real $\pi : E \to M$ e seja $d_\nabla \Omega^*(M; E) \to \Omega^{*+1}(M; E)$.

   (a) Se $s \in \Gamma(E)$ e $X, Y \in \Gamma(TM)$, prove que $(d_\nabla)^2 s(X, Y) = R(X, Y)s$.

   (b) Seja $R \in \Omega^2(M; \mathrm{End}(E))$ a forma de curvatura associada a ∇. Prove que $d_\nabla R = 0$.

4) Seja $\pi : E \to M$ uma fibrado vetorial real sobre uma variedade suave M e seja $R_\nabla \in \Omega^2(M; \mathrm{End}(E))$ a forma de curvatura de uma conexão ∇ em E. Seja $\Psi : P^n \to H^*_{dR}(M)$ o homomorfismo de Chern-Weil, definido por

$$\Psi(p) = [p(R^k)],$$

   onde $p \in P^n_k$ é uma forma k-linear simétrica $GL(n)$-invariante em $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ que induz uma aplicação $p : \Omega^{2k}(M; \otimes_k \mathrm{End}(E)) \to \Omega^{2k}(M)$. Prove que Ψ é independente da conexão.
   Dica: *Dadas duas conexões ∇_0 e ∇_1 em E, verifique que $\nabla = t\nabla_1 + (1-t)\nabla_0$ é uma conexão em f^*E, onde $f : M \times [0,1]_t \to M$ é a projeção. Depois prove que*

$$p(R^k_{\nabla_1}) - p(R^k_{\nabla_1}) = d(I(R^k_\nabla)),$$

   onde $I : \Omega^*(M \times [0,1]) \to \Omega^{*-1}(M)$ é operador integração em $[0,1]$.