Análise em variedades 2024

Lista 3

Entrega dia 9/9

1) Sejam $\phi_\pm : S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to \mathbb{R}^2$ as projeções estereográficas. Calcule as funções de transição entre as cartas de TS^2 associadas a ϕ_+ e ϕ_-.

2) Seja M uma variedade diferenciável e $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais suaves em M. Prove que
$$\mathfrak{X}(M) = \{\text{derivações de } C^\infty(M)\}.$$

3) Seja $\pi : M \to N$ uma submersão e $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$. Prove que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que X e $\widetilde{X}$ são π-relacionados. Esse campo é único?

4) Prove que TS^1 é difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

5) Construa três campos vetoriais que nunca se anulam sobre S^3.
(Dica: pense em $S^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ e para $x \in S^3$ considere $i \cdot x$, $j \cdot x$ e $k \cdot x$).