Análise em variedades 2024

Lista 2

Entrega dia 2/9

1) Seja $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ o círculo unitário e seja C a esfera unitária da norma L^∞ em $\mathbb{R}^2$, i.e.,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|, |y|) = 1\}.$$

   Construa um homeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\phi(S^1) = C$ e prove que não existe um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ com essa propriedade.

2) Prove que se $f : M \to N$ é uma imersão, injetiva e própria, então f é um mergulho.

3) Prove que se $f : M \to N$ é um mergulho, então $f(M)$ é uma subvariedade de N.

4) Sejam M e N variedades diferenciáveis e $(p, q) \in M \times N$. Construa uma bijeção canônica entre $T_{(p,q)}(M \times N)$ e $T_pM \oplus T_qN$.

5) Prove que o map $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$, $p(x) = \frac{x}{|x|}$ é uma submersão. Conclua que o mapa $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$, $\pi(x_0, \ldots, x_n) = [x_0 : \cdots : x_n]$ também é uma submersão.

6) Prove que o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2\}$ não é uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^2$.

7) Seja Q uma subvariedade diferenciável de M. Mostre que para todo $q \in Q$, existe uma inclusão natural $T_qQ \subset T_qM$.