Análise em variedades 2024

Lista 1

Entrega dia 26/8

1) Seja X um espaço topológico localmente euclideano e Hausdorff. Prove que X é 2-enumerável se, e somente se, X é paracompacto e possui um número enumerável de componentes conexas.

2) Seja $\mathcal{A}$ o atlas maximal padrão de $\mathbb{R}$. Seja $\widetilde{\mathcal{A}}$ o atlas maximal contendo a carta $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\phi(x) = x^3$. Prove que as variedades diferenciáveis $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ e $(\mathbb{R}, \widetilde{\mathcal{A}})$ são difeomorfas.

3) Seja $\mathbb{C}P^n$ o conjunto das retas complexas em $\mathbb{C}^{n+1}$, ou seja, $\mathbb{C}P^n$ é o conjunto dos subespaços vetoriais complexos de $\mathbb{C}^{n+1}$ de dimensão complexa 1. Prove que $\mathbb{C}P^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$. Prove que $\mathbb{C}P^1$ é difeomorfo a S^2.

4) Prove que $\mathbb{R}P^n$ e $\mathbb{C}P^n$ são compactos.